

<到達目標> 自分の習得状況を定期的にチェックせよ。

- 1 初項 a 、公比 r 、項数 n の等比数列の初項から第 n 項までの和の公式を覚えている
- 2 無限等比級数の収束条件と、収束するときの和について説明できる
- 3 循環小数は無限等比級数であることを理解し、分数で表すことができる

<次は有名な「無限等比級数」について考えましょう。これは、 $\{r^n\}$ の極限の復習も兼ねます!>

1 次の無限等比級数の収束・発散を調べ、収束するときは、その和 S を求めよ。

(1) $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots$ (2) $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots$

(3) $3 - \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \dots$

(4) $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$ (5) $-8 + 4 - 2 + \dots$

(6) $\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots$ (7) $-3 + 3 - 3 + 3 - \dots$

(8) $(3 + \sqrt{2}) + (2\sqrt{2} - 1) + (5 - 3\sqrt{2}) + \dots$

(9) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots$ (10) $1 + 0.9 + 0.81 + \dots$

(11) $27 - 9 + 3 - \dots$ (12) $2 + 2\sqrt{3} + 6 + \dots$

(13) $(2 - \sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 4) + (10 - 7\sqrt{2}) + \dots$

< Σ 記号で表されても対応できるように。>

2 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{5^n}\right)$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-1)^n}{4^n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n}$

<「無限等比数列」と「無限等比級数」の収束条件を間違わないように!!>

③ 次の問いに答えよ。

(1) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$

が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの和 S を求めよ。

(2) $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \dots$

が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの和 S を求めよ。

<数Iで学習した「循環小数」は、実は無限等比級数なのです!>

④ 次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{3}$

(2) $0.\dot{2}\dot{1}$

(3) $1.\dot{3}\dot{6}$

(4) $3.2\dot{1}\dot{8}$

(5) $2.\dot{0}2\dot{9} - 1.\dot{4}7\dot{3}$

【解答】

① (1) 発散 (2) 20 (3) $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ (4) 発散 (5) $-\frac{16}{3}$ (6) 発散 (7) 発散

(8) $\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$ (9) $-\frac{2}{3}$ (10) 10 (11) $\frac{81}{4}$ (12) 発散 (13) 1

② (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{12}{5}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $6(2+\sqrt{3})$ (5) $\frac{3}{4}$ (6) $\frac{16}{5}$ (7) $\frac{3}{2}$ (8) $\frac{1}{2}$

③ (1) $-\frac{1}{2} < x < -1$, $S = \frac{1}{1-2x}$ (2) $-3 < x < 3$, $S = \frac{3}{3+x}$

④ (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{7}{33}$ (3) $\frac{15}{11}$ (4) $\frac{177}{55}$ (5) $\frac{5}{9}$